CLASSE DE COMPACITE D'OPERATEUR INTERVENANT DANS UNE CLASSE DE PROBLEMES ELLIPTIQUES DEGENERES

BY

PHAM THE LAI

ABSTRACT

We compute here the class of compacity of those operators on $L^2(\Omega)$ the image of which belongs to some families of weighted Sobolev spaces. Such spaces are relevant for the study of some elliptic problems which degenerate at the boundary of Ω.

1. Introduction

Dans leur étude [2] d'un opérateur elliptique A dégénéré de second ordre dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qui généralise l'opérateur de Legendre lorsque $n = 1$, M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont donné un résultat sur le comportement asymptotique des valeurs propres de A (dans le cas auto-adjoint). Leur résultat est précis pour $n = 1$, mais la précision diminue lorsque n augmente.

Ils ont déterminé $\mathscr{D}(A^m)$ (domaine de A^m comme opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$) . Ces espaces, que nous notons ici $D^{2m}(\Omega)$, muni d'une norme hilbertienne naturelle, sont des espaces de Sobolev avec poids.

En suivant la méthode inaugurée par S. Agmon [1], nous étudions dans ce travail la classe d'opérateurs T continus dans $L^2(\Omega)$ dont l'image $\mathscr{R}(T)$ est dans un $D^{2m}(\Omega)$. Pour m assez grand, ces opérateurs sont des opérateurs intégraux de noyaux d'Agmon continus et bornés. Nous étudions ces noyaux en utilisant les résultats généraux de [6] et nous déterminons la class de compacité de T. Nous en déduisons la classe de compacité des injections de $D^{2m}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Ces résultats permettent d'obtenir une minoration des modules des valeurs

Received October 10, 1973

propres d'opérateur $\mathscr{A}$ non borné, fermé dans $L^2(\Omega)$, inversible, de domain $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ contenu dans un $D^{2m}(\Omega)$.

Appliqué à l'opérateur A, on retrouve ainsi un résultat de B. de Monvel et P. Grisvard [3], qui utilisent une méthode différente.

2. Notations et rappels

Les différentes normes rencontrées seront notées $|\ |$, sauf mention du contraire.

a. Soient X et Y un couple d'espaces de Hilbert avec $X \subsetneq Y$, c'est-à-dire X est un sous-espace dense de Y avec une injection continue. Ces données déterminent un opérateur Λ dans Y, auto-adjoint et strictement positif, de domaine $\mathscr{D}(\Lambda) = X$, avec:

$$(u, v)_X = (\Lambda u, \Lambda v)_Y \qquad \forall u, v \in X$$

$(\ ,\ )_X$ et $(\ ,\ )_Y$ étant les produits scalaires respectifs de X et Y.

On note, pour $0 \leqq \theta \leqq 1$, par $[X, Y]_\theta = \mathscr{D}(\Lambda_\theta)$, le domaine de Λ_θ. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_\theta = (\Lambda^\theta u, \Lambda^\theta v)_Y$$

$[X, Y]_\theta$ est une espace de Hilbert.

On note $[X, Y]_{-\theta}$ l'anti-dual de $[X, Y]_\theta$, $[X, Y]_{-\theta}$ est muni du produit scalaire naturel; en identifiant Y à son antidual et on notant X' l'antidual de X, on a:

$$X \subsetneq [X, Y]_\theta \subsetneq Y \subsetneq [X, Y]_{-\theta} \subsetneq X'.$$

Les espaces $[X, Y]_\theta$ sont des espaces d'interpolation entre X et Y; toutes ces propriétés sont données dans [5], par exemple.

b. Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord de classe $\mathscr{C}^\infty$, de bord noté $\partial\Omega$. On se donne une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, vérifiant:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \phi(x) > 0\}, \qquad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\}$$

$d\phi(x) \neq 0$ pour $x \in \partial\Omega$ ($d\phi$ étant la différentielle de ϕ).

m étant un entier $\geqq 0$, on considère maintenant l'espace des distributions sur Ω:

$$D^{2m}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega);\ u \in H^m(\Omega);\ \phi^m u \in H^{2m}(\Omega)\}.$$

$H^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel défini sur Ω; $H^0(\Omega)$ est l'espace des (classes) fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$.

$D^{2m}(\Omega)$ est muni de la norme hilbertienne:

$$|u|^2_{D^{2m}(\Omega)} = |u|_{H^m(\Omega)} + |\phi^m u|^2_{H^{2m}(\Omega)}.$$

Les espaces $D^{2m}(\Omega)$ sont introduits par M. S. Baouendi et C. Goulaouic [2] d'une manière naturelle dans leur étude de la régularité d'une classe d'opérateur elliptique de second ordre, dégénérant à la frontière.

Leurs résultats donnent en particulier le résultat d'interpolation suivant:

$$[D^{4m}(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = D^{2m}(\Omega) \tag{2.1}$$

avec des normes équivalentes.

Lorsque $2m > n/2$, par le théorème classique de Sobolev, on voit que pour $u \in D^{2m}(\Omega)$, u est (après modification usuelle sur un ensemble de mesure nulle) une fonction continue sur Ω et il est prouvé dans [2] l'inégalité de type de Sobolev suivante:

$$t^{1-(n/4m)}\phi(x)^{n/2}|u(x)|^2 \leqq C(|u|^2_{D^{2m}(\Omega)} + t|u|^2_{L^2(\Omega)})$$

pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$.

$$\phi(x)^{n/4}|u(x)| \leqq C|u|^{n/4m}_{D^{2m}(\Omega)}|u|^{1-(n/4m)}_{L^2((\Omega)} \tag{2.2}$$

pour tout $x \in \Omega$.

On note enfin $D^1(\Omega)$ l'espace $[D^2(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}$ et d'après [2], on a:

$$D^1(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}(\Omega);\ \phi^{\frac{1}{2}}Du \in L^2(\Omega),\ u \in L^2(\Omega)\}. \tag{2.3}$$

c. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et T un opérateur compact de H_1 dans H_2. On note $\{s_j(T)\}$ la suite décroissante (répétée suivant la multiplicité) des valeurs de $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, T^* étant l'adjoint hilbertien de T; $\{S_j(T)\}$ est appelée la suite des valeurs caractéristiques de T.

On note par $\{\lambda_j(T)\}$ la suite, rangée par ordre de module décroissant (et répétée suivant la multiplicité), de valeurs propres de T lorsque $H_1 = H_2$.

On utilisera le résultat suivant prouvé dans [6]: $X \subsetneqq Y$ étant le couple hilbertien de (a), supposons que l'injection I de X dans Y est compacte; alors $T = \Lambda^{-1}$ est compact de Y dans Y et on a:

$$s_j(I) = \lambda_j(T) \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

3. Noyaux d'Agmon

Soit le couple hilbertien $X \subsetneqq Y$ et T un opérateur continu de Y dans Y dont l'image $\mathscr{R}(T) \subset X$. Par le théorème du graphe fermé de Banach, T est aussi continu de Y dans X. On note donc:

$\| T \|_0$ la norme de T comme opérateur de Y dans Y;

$\| T \|_1$ la norme de T comme opérateur de Y dans X;

T^* désigne l'adjoint de T, comme opérateur de Y dans Y.

Rappelons le résultat suivant, prouvé dans [6].

THEOREME 3.1. *Soit T un opérateur continu de Y dans Y dont les images $\mathscr{R}(T)$ et $\mathscr{R}(T^*)$ sont dans X. Faisons l'hypothèse:*

$$[X, Y]_{\frac{1}{2}} \subset \mathscr{C}(\Omega) \tag{3.1}$$

avec une injection compacte, $\mathscr{C}(\Omega)$ étant l'espace des fonctions numériques continues sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

Alors, pour tout $x \in \Omega$, il existe $K_x \in [X, Y]_{\frac{1}{2}}$ telle que:

i. *l'application*

$$x \mapsto K_x$$

est continue de Ω dans $[X, Y]_{\frac{1}{2}}$;

ii. *pour tout $f \in Y$,*

$$Tf(x) = (f, K_x)_Y;$$

iii. *la fonction $K: (x, y) \mapsto K(x, y) = K_x(y)$ est continue sur $\Omega \times \Omega$; $\bar{K}$, la conjuguée de K, est appelée noyau d'Agmon associé à T. De plus, si*

$$[X, Y]_{\frac{1}{2}} \subset \mathscr{C}_b(\Omega) \tag{3.2}$$

avec une injection continue, $\mathscr{C}_b(\Omega)$ étant l'espace des fonctions numériques continues et bornées sur Ω muni de la norme naturelle, alors K est bornée sur $\Omega \times \Omega$ et on a l'inégalité:

$$\sup_{(x,y) \in \Omega \times \Omega} |K(x, y)| \leqq C(\| T \|_1 \, \| T^* \|_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

On va améliorer (3.3) en faisant l'hypothèse suivante: il existe deux constantes $0 < \alpha < 1$ et $C > 0$ telles que:

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leqq C |f|_{\frac{1}{2}}^{\alpha} |f|_Y^{1-\alpha} \quad \forall f \in [X, Y]_{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

C'est la Proposition 3.2.

PROPOSITION 3.2. *Soit T un opérateur continu de Y dans Y dont les images $\mathscr{R}(T)$ et $\mathscr{R}(T^*)$ sont dans X. Faisons les hypothèses* (3.1), (3.2) *et* (3.4).

Alors le noyau d'Agmon associé a T vérifie

$$(3.5)\qquad \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leqq C^2 \| T \|_1^{\alpha/2} \| T^* \|_1^{\alpha/2} \| T \|_0^{1-\alpha}.$$

Preuve. A l'aide du théorème des trois droites de Hadamard, il est prouvé dans [6] que l'on a:

$$(3.6)\qquad |Tf|_{\frac{1}{2}} < \| T \|_1^{\frac{1}{2}} \| T^* \|_1^{\frac{1}{2}} |f|_{-\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in Y.$$

Le même théorème donne en plus:

$$(3.7)\qquad |Tf|_Y \leqq \| T \|_0^{\frac{1}{2}} \| T^* \|_1^{\frac{1}{2}} |f|_{-\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in Y.$$

En effet, soient u et $v \in X$ et considérons la fonction d'une variable complexe:

$$F(z) = (T\Lambda^z u, v)$$

qui est holomorphe et bornée sur toute bande $a \leqq \operatorname{Re} z \leqq b \leqq 1$.

Pour $\operatorname{Re} z = 0$, on a:

$$F(it) = (T\Lambda^{it} u, v)_Y \qquad t \in \mathbb{R}$$

d'où, puisque Λ^{it} est unitaire:

$$|F(it)| \leqq \| T \|_0 |u|_Y |v|_Y.$$

Pour $\operatorname{Re} z = 1$, on a:

$$F(1+it) = (T\Lambda^{1+it} u, v)_Y = (\Lambda^{it} u, \Lambda T^* v)_Y \qquad t \in \mathbb{R}$$

d'où:

$$|F(1+it)| \leqq \| T^* \|_1 |u|_Y |v|_Y.$$

Le théorème de Hadamard donne:

$$|F(\tfrac{1}{2})| \leqq \| T \|_0^{\frac{1}{2}} \| T^* \|_1^{\frac{1}{2}} |u|_Y |v|_Y$$

ce qui prouve (3.7).

L'hypothèse (3.4) donne:

$$|Tf(x)| \leqq C |Tf|_{\frac{1}{2}}^{\alpha} |Tf|_Y^{1-\alpha} \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall f \in Y$$

puisque $Tf \in X$.

Les inégalités (3.6), (3.7) donnent alors:

$$(3.8)\qquad |Tf(x)| \leqq C \| T \|_1^{\alpha/2} \| T^* \|_1^{\frac{1}{2}} \| T \|_0^{(1-\alpha)/2} \; |f|_{-\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall f \in Y.$$

(3.8) et (ii) du Théorème 3.1 donnent:

$$(3.9)\qquad |K_x|_{\frac{1}{2}} \leqq C \| T \|_1^{\alpha/2} \| T^* \|_1^{\frac{1}{2}} \| T \|_0^{(1-\alpha)/2}\ .$$

D'après l'inégalité de convexité classique des espaces d'interpolation, on a:

$$|u|_{\frac{1}{2}} \leqq |u|_X^{\frac{1}{2}} |u|_Y^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in X.$$

En utilisant de nouveau (3.4), on a:

$$|Tf(x)| \leqq C\,|Tf|_X^{\alpha/2} \,\|\, Tf\,|_Y^{1-(\alpha/2)} \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall f \in Y$$

puisque $Tf \in X$.

D'où:

$$|K_x|_Y \leqq C \| T \|_1^{\alpha/2} \| T \|_0^{1-(\alpha/2)} \quad . \tag{3.10}$$

Les inégalités (3.9), (3.10) donnent (3.5) en utilisant de nouveau l'hypothèse (3.4).

REMARQUE. L'inégalité (3.5) est une amélioration technique de celle qu'a obtenue S. Agmon dans le cas $X = H^m(\Omega)$ et $Y = L^2(\Omega)$.

En effet, S. Agmon dans [1] prouve dans ce cas l'inégalité:

$$\sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leqq C(\| T \|_1 + \| T^* \|_1)^{n/m} \| T \|_0^{1-(n/m)}$$

en utilisant un raisonnement d'homogénéité.

Utilisant (3.5), on a en effet:

$$\sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} |K(x,y)| \leqq C(\| T \|_1 \| T^* \|_1)^{n/2m} \| T \|_0^{1-(n/m)}. \tag{3.11}$$

4. Opérateurs à images dans $D^{2m}(\Omega)$ et noyaux d'Agmon associés

On va étudier dans cette section les opétateurs T continus de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ dont les images $\mathscr{R}(T)$ et $\mathscr{R}(T^*)$ sont dans $D^{2m}(\Omega)$. On note ici:

$\| T \|_0$ la norme de T comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$;

$\| T \|_{D^{2m}}$ la norme de T comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $D^{2m}(\Omega)$.

On a le Théorème 4.1.

THEOREME 4.1. *Soit m entier avec $m > n/2$. Soit T un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ dont les images $\mathscr{R}(T)$ et $\mathscr{R}(T^*)$ sont dans $D^{4m}(\Omega)$.*

Alors T est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon K continu borné sur $\Omega \times \Omega$:

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\,dy \qquad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{4.1}$$

De plus, on a les inégalités:

$$|K(x,y)| \leqq C(\| T \|_{D^{4m}} \| T^*{}_{D^{4m}})^{n/4m} \| T \|_0^{1-(n/2m)} \tag{4.2}$$

$$|K(x,y)| \leqq C[\phi(x)\phi(y)]^{-n/4}(\| T \|_{D^{4m}} \| T^* \|_{D^{4m}})^{n/8m} \| T \|_0^{1-(n/4m)} \tag{4.3}$$

pour $\forall x, y \in \Omega \times \Omega$.

PREUVE. On applique d'abord le Théorème 3.1 avec:

$$X = H^{2m}(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega)$$

puisque l'on a:

$$D^{4m}(\Omega) \subset H^{2m}(\Omega)$$

avec injection continue; on obtient immédiatement (4.1), (4.2) en vertu de la remarque du Section 3 et en vertu de l'hypothèse $m > n/2$.

Il reste à prouver (4.3).

(2.1) et l'inègalitè (2.2) donnent:

$$\phi(x)^{n/4} \left| Tf(x) \right| \leqq C \left| Tf \right|_{D^{2m}}^{n/4m} \left| Tf \right|_0^{1-(n/4m)} \qquad \forall f \in L^2(\Omega) \tag{4.4}$$

puisque $2m > n/2$.

En utilisant les inégalités (3.6), (3.7) avec $X = D^{4m}(\Omega)$ et $Y = L^2(\Omega)$ et vu (2.1), (4.4), on a:

$$\phi(x)^{n/4} \left| Tf(x) \right| \leqq C \| T \|_{D^{4m}}^{n/8m} \| T^* \|_{D^{4m}}^{\frac{1}{2}} \| \quad \|_0^{(\frac{1}{2})(1-(n/4m))} \left| f \right|_{D^{-2m}} \tag{4.5}$$

pour $\forall f \in L^2(\Omega)$.

On a noté $| \quad |_{D^{-2m}}$ la norme de l'antidual de $D^{2m}(\Omega)$. (4.1) et (4.5) donnent alors:

$$\phi(x)^{n/4} \left| K_x \right|_{D^{2m}} \leqq C \| T \|_{D^{4m}}^{n/8m} \| T^* \|_{D^{4m}}^{\frac{1}{2}} \| T \|_0^{(1/2)(1-(n/4m))} . \tag{4.6}$$

De la même manière que dans la preuve de (3.10), on a:

$$\phi(x)^{n/4} \left| K_x \right|_0 \leqq C \| T \|_{D^{4m}}^{n/8m} \| T \|_0^{1-(n/8m)} . \tag{4.7}$$

En utilisant de nouveau (2.2) pour $K_x \in D^{2m}(\Omega)$, on obtient (4.3) en vertu des inégalités (3.6), (4.7).

On aura besoin du lemme suivant, prouvé dans [6].

LEMME 4.2. *Soit un couple hilbertien* $X \subsetneqq Y$ *et* T *un opérateur continu de* Y *dans* Y *dont l'image* $\mathscr{R}(T) \subset X$.

Alors:

$$\mathscr{R}((TT^*)^{\frac{1}{2}}) \subset X .$$

Un opérateur T vérifiant les hypothèses du Théorème 4.1 est évidemment compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On va utiliser le Théorème 4.1 pour étudier la classe de compacité de T. C'est le Théorème 4.2.

THEOREME 4.2. *Soit T un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ vérifiant les hypothèses du Théorème* 4.1. *Alors*:

a. *T est un opérateur nucléaire avec un noyau d'Agmon K continu et borné sur $\Omega \times \Omega$. Si $\{\lambda_j(T)$ est la suite des valeurs propres de T, la série $\sum_j \lambda_j(T)$ est absolument convergente.*

De plus, si T est auto-adjoint positif, on a:

$$\sum_j \lambda_j(T) = \int_\Omega K(x,x)dx. \tag{4.8}$$

b. *Si $\{s_j(T)\}$ est la suite des valeurs caractéristiques de T, alors*

i. $s_j(T) \leqq Cj^{-4m}$ *dans le cas $n = 1$;*

ii. $s_j(T) \leqq C\left(\frac{\log j}{j}\right)^{2m}$ *dans le cas $n = 2$;*

iii. $s_j(T) \leqq Cj^{-2m/(n-1)}$ *dans le cas $n \geqq 3$.*

c. *Les* (i), (ii), (iii) *sont valables aussi pour la suite $\{|\lambda_j(T)|\}$.*

PREVUE. a. Ce cas est prouvé dans [1] ou [6] car on a:

$$D^{4m}(\Omega) \subset H^{2m}(\Omega)$$

avec injection continue et car $2m > n$ par hypothèse.

b. Posons

$$S = (T^*T)^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu du Lemme 4.2 appliqué à T^*, on a:

$$\mathscr{R}(S) \subset D^{4m}(\Omega).$$

Donc S, auto-adjoint positif de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, vérifie les hypothèses du Théorème 4.1.

Considérons, suivant la technique inaugurée par S. Agmon [1], la famille des résolvantes modifiées de S:

$$S_t = S(I + tS)^{-1} \tag{4.9}$$

qui existe pour $t > 0$.

S_t est auto-adjoint positif et vérifie les hypothèses du Théorème 4.1; en utilisant un résultat de [1], on a

$$\| S_t \|_0 \leqq \frac{1}{t}$$

(4.10)

$$\| (I + tS)^{-1} \|_0 \leqq 1 .$$

S_t est évidemment compact. On voit aisément que la suite des valeurs propres est:

$$\left\{ \frac{1}{\mu_j(T) + t} \right\}$$

ayant noté:

$$\mu_j(T) = S_j(T)^{-1} .$$

On note G_t le noyau d'Agmon associé à S_t. Alors (4.3) appliqué à S_t dans le cas diagonal donne:

$$G_t(x,x) \leqq C\phi(x)^{-n/2} \| S_t \|_{D^{4m}}^{n/4m} \| S_t \|_0^{1-(n/4m)} \tag{4.11}$$

pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$.

(4.9) et (4.10) donnent:

$$\| S_t \|_{D^{4m}} \leqq \| S \|_{D^{4m}} . \tag{4.12}$$

(4.10), (4.11), (4.12) donnent:

$$G_t(x,x) \leqq C\phi(x)^{-n/2} t^{(n/4m)-1} \tag{4.13}$$

pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$.

On considère à présent le cas (i), c'est-à-dire, $n = 1$. La fonction $\phi(x)^{-\frac{1}{2}}$ est alors intégrable sur Ω, donc en intégrant (4.13), on a:

$$\int_\Omega G_t(x,x)dx \leqq Ct^{(1/4m)-1} . \tag{4.14}$$

(4.8), (4.14) donnent alors

$$\Sigma \frac{t}{\mu_j(T) + t} \leqq Ct^{(1/4m)-1} . \tag{4.15}$$

Soit $N(t)$ le nombre des $\mu_j(T)$ tel que $\mu_j(T) \leqq t$.

De (4.15), il vient:

$$N(t) \leqq Ct^{1/4m}$$

ce qui donne (i) puisque:

$$j \leqq N(s_j(T)^{-1}).$$

Envisageons maintenant le cas (iii), c'est-à-dire, $n \geqq 3$.

En plus de (4.13), on utilise (4.2) et (4.10), (4.12) pour avoir:

$$G_t(x, x) \leqq Ct^{(n/2m)-1} \tag{4.16}$$

pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$.

$G_t(x, x)$ étant intégrable sur Ω pour tout $t > 0$, on a:

$$\int_{\Omega} G_t(x, x)dx = \int_{\Omega_1} G_t(x\,x)dx + \int_{\Omega_2} G_t(x, x)dx \tag{4.17}$$

pour toute partition measurable $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$.

$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \delta\Omega)$ et notons:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega;\ \delta(x) \leqq t^{-1/2m}\} \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega;\ \delta(x) > t^{-1/2m}\}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Alors, (4.16) et (4.18) donnent:

$$\int_{\Omega_1} G_t(x, x)dx \leqq Ct^{((n-1)/2m)-1} \tag{4.19}$$

où C est une constante indépendante de T.

En vertu des hypothèses faites sur ϕ et Ω, on a $\phi(x) \sim \delta(x)$ pour x voisin de $\delta\Omega$.

En vertu de l'égalité évidente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1+(n/2)} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{ds}{s^{n/2}} = \frac{2}{n-2}$$

(puisque l'on a $n > 2$), ils existent deux constantes T_0 et C telles que

$$\int_{\Omega_2} \phi(x)^{-n/2} dx \leqq Ct^{(n-2)/4m} \tag{4.20}$$

pour tout $t \geqq T_0$.

(4.13), (4.20) donnent:

$$\int_{\Omega_2} G_t(x, x)\, dx \leqq Ct^{((n-1)/2m)-1} \tag{4.21}$$

pour tout $t \geqq T_0$; C étant une constante indépendante de t. (4.17), (4.19) et (4.21) montrent que l'on a:

$$\int_{\Omega} G_t(x, x)dx \leqq Ct^{((n-1)/2m)-1}$$

pour tout $t \geqq T_0$.

On obtient alors (iii) comme dans le cas (i).

On considère à present le cas (ii), c'est-à-dire, $n = 2$.

Comme on a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (-\log \varepsilon)^{-1} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{ds}{s} = 1$$

ils existent deux constantes $T_0 > 1$ et C telles que:

$$\int_{\Omega_2} \phi(x)^{-1} dx \leqq C \log t \tag{4.22}$$

pour tout $t \geqq T_0$.

(4.13) et (4.22) donnent:

$$\int_{\Omega_2} G_t(c, x)\, dx \leqq C t^{(1/2m)-1} \log t. \tag{4.23}$$

Avec (4.19) qui est valable dans le cas présent et (4.23), on obtient:

$$\int_{\Omega} G_t(x, x)\, dx \leqq C^{(1/2m)-1} \log t.$$

D'où

$$N(t) \leqq C t^{1/2m} \log t. \tag{4.24}$$

La fonction $t^{1/2m} \log t$ étant continue strictement croissante pour $t \geqq 1$, la fonction inverse $h(t)$ l'est aussi pour $t \geqq 0$.

Si l'on pose:

$$g(t) = \left[\frac{t}{\log(t^{2m})}\right]^{2m}$$

on vérifie que l'on a:

$$g(t) \leqq h(t) \quad \text{pour tout } t \geqq 1.$$

Ces calculs et (4.24) prouvent que l'on a:

$$\left(\frac{j}{\log j}\right)^{2m} \leqq \frac{C}{s_j(T)}$$

avec C une constante indépendante de j, d'où (ii).

c. Les parties (i) et (iii) se prouvent de la même manière que dans (b) en untilisant un résultat de I. C. Gohberg et M. G. Krein [4].

Le même résultat de [4] est encore valable pour les suites du type:

$$j^{-2m}(\log j)^{2m}$$

puisque $(\log t)^{2m}$ est une fonction à variation lente (suivant la terminologie de ces auteurs), donc (ii) est aussi valable.

5. Classe de compacité de l'injection de $D^{2m}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (pour m entier $\geqq 1$ ou $m = 1/2$)

On note cette injection par:

$$I_{2m}: D^{2m}(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

Pour étudier le comportement asymptotique de la suite $\{s_j(I_{2m})\}$ des valeurs caractéristiques de I_{2m}, on rappelle ici un résultat de [2] sur les itérés d'un opérateur elliptique de second ordre, dégénérant au bord.

Soit l'opérateur diffèrentiel

$$a(x, D) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} D_j \phi(x) D_j$$

où l'on note:

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \partial = 1, \cdots, n; \qquad D_0 = \text{identité}.$$

On considère la forme intégro-différentielle associée

$$a(u, v) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} \int_\Omega \phi(x) D_j u(x) \overline{D_j v(x)}\, dx.$$

Soit ϑ l'espace des distributions sur Ω:

$$\vartheta = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \phi^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\Omega),\ \phi^{\frac{1}{2}} D_j u \in L^2(\Omega), \qquad j = 1, \cdots, n\}$$

muni de la norme hilbertienne:

$$\| u \|_\vartheta^2 = a(u, u).$$

On note par A, l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$, auto-adjoint strictement positif engendré par la forme $a(u, v)$ et par le lemme de Lax-Milgram.

Alors, en notant:

$$\Lambda = A^{\frac{1}{2}}$$

on a:

$$\mathscr{D}(\Lambda) = \vartheta.$$

Suivant [5], on a:

$$\vartheta = D^1(\Omega) \tag{5.1}$$

avec des normes équivalentes.

Le théorème de régularité principal de [2] prouve aussi que l'on a:

(5.2) $$\mathscr{D}(A^m) = D^{2m}(\Omega) \qquad \forall m \text{ entier } \geqq o$$

et la norme hilbertienne du graphe de A^m est équivalente à celle de $D^{2m}(\Omega)$.

En vertu de (5.1) et (5.2), il suffit donc d'étudier les injections:

$$J_{2m}\colon \mathscr{D}(A^m) \to L^2(\Omega)$$

pour m entier $\geqq 1$ ou $m = \frac{1}{2}$.

En utilisant (2.4), on a:

(5.3) $$s_j(J_1) = \frac{1}{\mu_j(\Lambda)} \qquad \forall j$$

en notant par $\{\mu_j(\Lambda)\}$ la suite croissante (et répétée suivant la multiplicité) des valeurs propres de Λ.

La diagonalisation (voir [5], par exemple) de A prouve aisément que l'on a, vu (5.3),

(5.4) $$s_j(J_{2m}) = \{\mu_j(\Lambda)]^{-2m} \qquad \forall j.$$

En vertu de (5.1) ou (5.2), on peut utiliser le Théorème 4.2, partie (b), appliqué) à $T = A^{-2m}$ pour $m > n/2$; on obtient une majoration des $s_j(A^{-2m})$.

On a évidemment:

(5.5) $$s_j(A^{-2m}) = [\mu_j(\Lambda)]^{-4m}$$

ce qui donne une majoration des $s_j(J_1)$ vu (5.3), puis une majoration des $s_j(J_{2m})$ pour tout m entier $\geqq 1$ vu (5.4). On a donc la Proposition 5.1.

PROPOSITION 5.1. *Soit m entier $\geqq 1$ ou $m = \frac{1}{2}$. Il existe une constante C telle que:*

i. *si la dimension $n = 1$, alors:*
$$s_k(I_{2m}) \leqq Cj^{-2m}$$

ii. *si la dimension $n = 2$, alors:*
$$s_j(I_{2m}) \leqq C\left(\frac{\log j}{j}\right)^m$$

iii. *si la dimension $n \geqq 3$, alors:*
$$s_k(I_{2m}) \leqq C^{-m/(n-1)}.$$

On en déduit le Corollaire 5.2.

COROLLAIRE 5.2. *Soit m entier $\geqq 1$ ou $m = \frac{1}{2}$. Soit T un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ dont l'image $\mathscr{R}(T) \subset D^{2m}(\Omega)$.*

a. *Si $\{s_j(T)\}$ est la suite des valeurs caractéristiques de T, alors:*

i. $s_j(T) \leqq Cj^{-2m}$ *dans le cas* $n = 1$;

ii. $s_j(T) \leqq C((\log j)/j)^m$ *dans le cas* $n = 2$;

iii. $s_j(T) \leqq C^{-m/n-1)}$ *dans le cas* $n \geqq 3$.

b. *Les* (i), (ii), (iii) *sont valables aussi pour la suite* $\{|\lambda_j(T)|\}$, $\{\lambda_j(T)\}$ *étant la suite des valeurs propres de T.*

PREUVE. Il suffit d'utiliser l'inégalité connue:

$$s_j(T) \leqq Cs_j(I_{2m})$$

et s'applique la Proposition 5.1.

D'une manière classique, le Corollaire 5.2 donne une minoration des modules des valeurs propres d'opérateur $\mathscr{A}$ non borné, fermé de domaine $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ contenu dans un $D^{2m}(\Omega)$.

Dans le cas variationnel et auto-adjoint, on utilise le résultat suivant, qui n'utilise pas de résultat de régularité supplémentaire. C'est le Corollaire 5.3.

COROLLAIRE 5.3. *Soit m entier $\geqq 1$ ou $m = \frac{1}{2}$ et soit:*

$$u, v \mapsto a(u; v)$$

une forme sesquilinéaire hermitienne sur $D^{2m}(\Omega) \times D^{2m}(\Omega)$, continue et coercitive, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes α et M telles que:

$$|a(u,v)| \leqq M|u|_{D^{2m}(\Omega)}|v|_{D^{2m}(\Omega)} \qquad u, v \in D^{2m}(\Omega)$$

$$a(u,v) \geqq \alpha |u|^2_{D^{2m}(\Omega)}.$$

Soit $\mathscr{A}$ l'opérateur auto-adjoint à domaine $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ dense défini par:

$$\int_\Omega \mathscr{A}u\bar{v}dx = a(u,v) \qquad u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}), \qquad v \in D^{2m}(\Omega).$$

Si $\{\lambda_j\}$ est la suite des valeurs propres de $\mathscr{A}$ (qui sont toutes positives) rangée par ordre croissant et répétée suivant la multiplicité, alors il existe une constante C telle, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

i. $\lambda_j \geqq Cj^{4m}$ *dans le cas* $n = 1$;

ii. $\lambda_j \geqq C(j/\log j)^{2m}$ *dans le cas* $n = 2$;

iii. $\lambda_j \geqq Cj^{2m/(n-1)}$ *dans le cas* $n \geqq 3$.

PREVUE. Il suffit de considérer $\mathscr{A}^{\frac{1}{2}}$ et d'utiliser le résultat connu:

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}^{\frac{1}{2}}) = D^{2m}(\Omega).$$

Le Corollaire 5.3 provient alors du Corollaire 5.2 en posant:

$$T = \mathscr{A}^{-\frac{1}{2}}$$

qui est continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ avec $\mathscr{R}(T) \subset D^{2m}(\Omega)$.

Dans le cas non auto-adjoint, on utilise le Corollaire 5.4.

COROLLAIRE 5.4. *Soit m entier $\geqq 1$ ou $m = \frac{1}{2}$ et $\mathscr{A}$ un opérateur non borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, fermé, de domaine dense $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ contenu dans $D^{2m}(\Omega)$ et inversible.*

Si $\{\lambda_j\}$ est la suite des valeurs propres de $\mathscr{A}$, rangée par ordre de module croissant et répétée suivant la multiplicité, alors il existe une constante C telle que (i), (ii), (iii) *du Corollaire* 5.3 *sont valables pour la suite des modules $\{|\lambda_j|\}$.*

PREUVE. C'est immédiat car il suffit de poser

$$T = \mathscr{A}^{-1}$$

et d'utiliser encore le Corollaire 5.2.

REMARQUE. Avec les notations du Section 5, soit la forme intégro-différentiable

$$a(u,v) = \sum_{0 \leqq j,k \leqq n} \int_\Omega \phi(x) a_{jk}(x) D_j u(x) \overline{D_k v(x)}\, dx$$

ou les $a_{jk}(x)$ sont des fonctions de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ avec:

$$\min_{x \in \Omega} \operatorname{Re} a_0(x) > 0$$

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} \min_{|\xi|=1} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$$

et on considère le problème variationnel avec la forme $a(u, v)$ et $D^1(\Omega)$. Ces hypothèses prouvent que $a(u,v)$ est $D^1(\Omega)$-coercitive et soit A l'opérateur engendré par le lemme de Lax-Milgram: A est une réalisation de l'opérateur différentiel:

$$A(x,D) = \sum_{0 \leqq j,k \leqq n} D_j a_{jk}(x) \phi(x) D_k .$$

Les résultats de régularité de [2] prouvent que $\mathscr{D}(A) = D^2(\Omega)$; si on applique à A le Corollaire 5.4, on retrouve ainsi un résultat de [3]. Ces auteurs utilisent une autre méthode, basée sur un calcul explicite des valeurs propres dans le cas $a_{jk}(x) = \delta_{jk}$, Ω la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $\phi(x) = 1 - |x|^2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon, *On kernels, eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 627–663.

2. M. S. Baouendi et C. Goulaoutic, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs dégénérés*, Archive Rational Mech. Anal. **5** (1969), 361–379.

3. Boutet de Monvel et P. Grisvard, *Le comportement asymptotique des valeurs propers d'un opérateur*, C. R. Acad. Sci. Paris, **272** (1971), 23–26.

4. I. C. Gohberg et M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear non self-adjoint operators*, Trans. Amer. Math. Soc. (1969).

5. J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, vol. 1 Dunod, Paris, 1968.

6. Pham The Lai, *Noyaux associés aux opérateurs réguliers dans les espaces de Hilbert*, à paraître aux Arch. Rational Mech. Anal.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NANTES
NANTES, FRANCE